**Tema 3.1.2. Distribución de Bernoulli y Binomial.**

**Motivación del Tema.**  Un distribuidor de cigarrillos selecciona aleatoriamente a un fumador y le pregunta qué marca de cigarrillos prefiere. La respuesta sólo tiene 2 respuestas que indica que fuma cigarrillos Montana y que indica que no fuma esa marca. Además se tienen las probabilidades: y . La función de densidad Bernoulli, para este ejemplo, está definida por la tabla

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

La distribución binomial aparece cuando tenemos más de un fumador. Ahora el distribuidor selecciona a 4 fumadores de cigarrillos y les pregunta qué marca prefieren.



¿Cuál es la probabilidad de que 2 personas fumen cigarrillos Montana? Los posibles casos en que 2 personas fuman cigarrillos Montana son:

En donde la interpretación de la primera cuarteta es: Las personas 1 y 2 fuma cigarrillos Montana, pero la tercera y cuarta no. Ahora supongamos que la probabilidad de que una persona fume cigarrillos Montana es y de que no fume esa marca es , donde , entonces la probabilidad de una de las cuartetas de arriba la calculamos como:

Entonces la probabilidad de que 2 personas fumen cigarrillos Montana se obtiene sumando las probabilidades de las demás cuartetas. Como cada cuarteta tiene la misma probabilidad, 2 M’s y 2 N´s, entonces basta multiplicar por el número de cuartetas que es , pues debemos seleccionar 2 personas de las 4 para encontrar los posibles casos en que 2 personas fuman cigarrillos Montana. Así, si es la variable aleatoria que cuenta el número de fumadores de cigarrillos Montana entonces

Si ahora queremos que a lo más 2 personas fumen cigarrillos Montana la respuesta la obtenemos como:

Ahora supongamos que tenemos fumadores y buscamos la probabilidad de que fumadores fumen cigarrillos Montana y no fumen esa marca, entonces debemos primero sacar la probabilidad a una áda que tiene M’s, que son los que fuman cigarros de la marca Montana, y tiene además N´s correspondiente a los que no fuman esa marca, su probabilidad es . Ahora multiplicamos por el total de ádas que tienen M´s y N´s, este número es . Por lo tanto la probabilidad es

Observe que , el número de fumadores de cigarrillos Montana, solo puede tomar los valores .

**Definición 1. Experimento Bernoulli.** Un experimento Bernoulli tiene 4 propiedades:

* 1. El experimento consiste en 1 ensayo.
  2. En el ensayo hay 2 resultados posibles : *éxito(E)* y *fracaso(F)*
  3. La probabilidad de *éxito* es , la probabilidad de fracaso es y

**Definición 2. Distribución de Bernoulli.** Una variable aleatoria tiene una distribución de Bernoulli, con parámetro , si su función de densidad es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

donde

probabilidad de tener éxito,

**Ejemplo 1.** La probabilidad de que un tornillo esté defectuoso es . (a) Dibuje la función de densidad de la variable aleatoria de Bernoulli correspondiente, (b) calcular .

**Solución.** Para (a) la función de densidad es

y su gráfica es

Para (b), como sólo hay 0 o 1 tornillo defectuoso entonces la probabilidad se calcula como:

**Definición 3. Experimento Binomial.** Un experimento binomial tiene las siguientes 4 propiedades

3.1. El experimento consiste de ensayos idénticos.

3.2. En cada ensayo hay 2 resultados , *éxito* o *fracaso*.

3.3. La probabilidad de *éxito* es , no cambia de un ensayo a otro. La probabilidad de *fracaso* es , tampoco cambia de un ensayo a otro y .

3.4. Los ensayos son independientes.

**Definición 4. Distribución Binomial.** Una variable aleatoria tiene una distribución binomial con parámetros y , escrito como , si su función de densidad es de la forma:

donde

probabilidad de tener éxitos en ensayos.

número de ensayos.

=Formas de colocar éxitos en una áda

probabilidad de un éxito, probabilidad de un fracaso

**Teorema 1. Propiedades de la distribución binomial.**

**Ejemplo 2.** Si lanzamos una moneda 3 veces y cuenta el número de caras. Supongamos que éxito es obtener cara y . (a) Explique por qué este experimento es binomial. (b) escribir la función de densidad , (c) Calcular la probabilidad de obtener 2 caras , (d) calcular la probabilidad de obtener por lo menos dos caras .

**Solución.** Para (a)debemos comprobar que el lanzamiento de la moneda 3 veces satisface las 4 condiciones de la definición 3.

* El experimento consta de 3 ensayos o lanzamientos de la moneda.
* En cada ensayo o lanzamiento sólo hay 2 resultados posibles cara o sello .
* La probabilidad de cara es y la de sello es y son las mismas en cada ensayo.
* Cada lanzamiento es independiente de los demás.

Para (b) la respuesta es

y su gráfica es

Para (c) la respuesta es

Probabilidad de obtener dos caras

Para (d) la respuesta es

Probabilidad de obtener por lo menos dos caras

Para (c) necesitamos calcular

**Ejemplo 3.** Considere a un vendedor de seguros que visita a 10 familias elegidas en forma aleatoria. El resultado correspondiente de la visita a cada familia se clasifica como éxito si la familia compra un seguro y como fracaso si no compra un seguro. Por experiencia el vendedor sabe que la probabilidad de que una familia compre un seguro es 0.10. Calcule: (a) la función de densidad, (b) , (c) , (d) .

**Solución.** Para (a) tomamos y , así la ecuación es

y su gráfica es

Para (b) la respuesta es

Para (c) la respuesta es

Para (d) la respuesta es

En lugar de calcular esta suma larga utilizamos la propiedad 3 del teorema 1, para así obtener

**Ejemplo 3.** La probabilidad de que Ana logre un objetivo en cualquier momento es de donde ella pierde con probabilidad . Suponga que ella dispara al objetivo 7 veces. Este es un experimento binomial con y . Encuentre la probabilidad de que ella alcance el objetivo: (a) Exactamente tres veces. (b) Al menos una vez.

**Solución.** La gráfica de la distribución binomial se muestra en la figura de abajo



(a) Aquí por lo tanto . Por el Teorema 1, la probabilidad de que ella alcance el objetivo 3 veces es:

(b) La probabilidad de que ella nunca alcance el objetivo, es decir, que todos sean fracasos es:

Por tanto, la probabilidad de que ella alcance el objetivo al menos una vez es

donde hemos utilizado la fórmula 3 del teorema 1.

**Ejercicios.**

1. La probabilidad de que un enfermo se recupere de un padecimiento gástrico es 0.8. Suponga que 20 personas han contraído tal afección.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan exactamente 14?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan al menos 10?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 14, pero no más de 18, sobrevivan?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 16 sobrevivan?

Respuesta: (a) 0.109, (b) 0.999, (c) 0.844, (d) 0.589.

1. Un examen de opción múltiple está compuesto de 15 preguntas, con 5 respuestas posibles, de las cuales solamente una es correcta. Supóngase que uno de los estudiantes que realiza el examen contesta las preguntas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente al menos 10 preguntas?

Respuesta: 0.0001132

1. Una empresa exploradora de yacimientos petrolíferos hace 10 exploraciones. La probabilidad de que una exploración sea exitosa es de 0.1. Suponga que las exploraciones son independientes, (a) ¿cuál es la probabilidad de que 0 exploraciones sean exitosas?, (b) ¿cuál es la probabilidad de que 10 exploraciones sean exitosas?, (c) ¿cuál es el número de exploraciones con mayor probabilidad de ser exitosas?, (d) trace la gráfica de la función de densidad.

Respuesta: (a) 0.3486, (b) , (c) 1

1. Encuentre la probabilidad de que en una familia de 4hijos haya (a) al menos un niño, (b) al menos 1 niño y al menos 1 niña.

Respuesta: (a) 15/16, (b) 7/8

**Teorema 2. Propiedades de la Distribución Binomial.**

|  |
| --- |
| Distribución Binomial |
| Esperanza  Varianza  Desviación estándar  Función Generadora de Momentos |

**Ejemplo 4.** Resuelva los siguientes 3 problemas :

(a)La probabilidad de que Juan dé en el blanco es . Él dispara 100 veces. Encuentre el número esperado μ de veces que él da en el blanco y la desviación estándar .

**Solución.** Aquí y entonces . De donde

y

La gráfica de esta distribución binomial es



(b) Un dado equilibrado es lanzado 180 veces. Encuentre el número esperado μ de veces en que aparecerá la cara 6 y la desviación estándar σ.

**Solución.** Aquí y entonces , de donde

*Y*

La gráfica de esta distribución binomial es



(c) Encuentre el número esperado de respuestas correctas, obtenido por adivinanza en una prueba verdadero - falso de 30 preguntas.

**Solución.** Aquí  *.* Por tanto *.*

**Demostración.** Pasamos a demostrar la fórmula de la función generadora de momentos del teorema 2.

donde hemos usado la ley de los exponentes

**Ejercicios.**

1. Utilizando la función generadora de momentos de la distribución binomia, demuestre que su esperanza es y su varianza es .

Ayuda: y . Observe que

1. Una concentración particular de una sustancia química, encontrada en agua contaminada resulta ser mortal para el 20% de los peces expuestos a esa concentración durante 24 horas. Se colocan 20 peces en un tanque que contiene agua con esa concentración. Obtenga la media y la varianza del número de peces que sobrevivirán.

Respuesta: , .

1. Diez motores son empaquetados para la venta en un almacén. Los motores se venden a $100.00 dólares cada uno, pero se aplica una garantía de reembolso doble por cada motor defectuoso. Encuentre la ganancia esperada del vendedor si la probabilidad de que salga un motor defectuoso es de 0.08.

Ayuda: Obtenga el número esperado de motores defectuosos y multiplíquelo por $200.00

Respuesta: $840.00

1. Una empresa de exploración petrolera va a financiar 10 exploraciones. La probabilidad de que una exploración sea exitosa es de 0.1. A la empresa le cuesta $20 000.00 dólares preparar el equipo. Si cada exploración exitosa cuesta $30 000.00, y cada exploración fallida, $15 000.00, encuentre el costo total esperado de la empresa.

Ayuda: el número esperado de exploraciones exitosas es , ¿ …y las fallidas?

Respuesta: $185 000.00